

Kalenderjahreseffekte im Zuwachsquotenverfahren

DAV/DGVFM-Herbsttagung 2023

Ulrich Riegel

Agenda

Problemstellung

Ein additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Zuwachsquotenverfahren mit Kalenderjahreseffekten

Numerisches Beispiel

Anhang A: EM-Algorithmus

Anhang B: Standardfehler

Anhang C: Robustifizierung

Problemstellung

Die meisten IBNR-Verfahren verwenden die Annahme, dass die Anfalljahre unabhängig sind. Diese Annahme ist verletzt, wenn es Kalenderjahreseffekte gibt!

Beispiel: Covid-Effekte in US Marktdaten



Können wir solche Marktdaten als *A-priori-Information* zu Kalenderjahreseffekten im Zuwachsquotenverfahren zu berücksichtigen?

Agenda

Problemstellung

Ein additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Zuwachsquotenverfahren mit Kalenderjahreseffekten

Numerisches Beispiel

Anhang A: EM-Algorithmus

Anhang B: Standardfehler

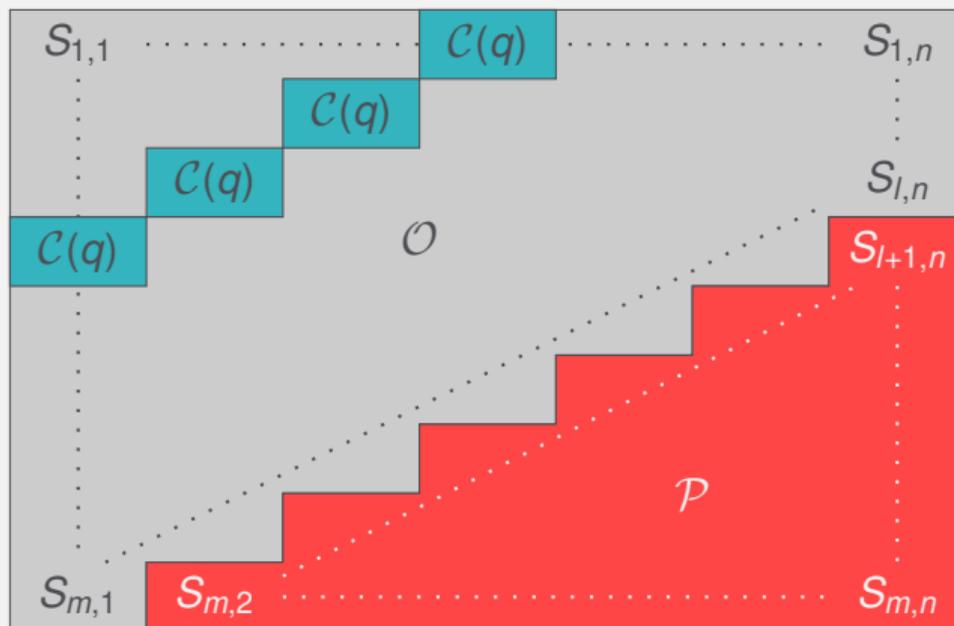
Anhang C: Robustifizierung

Notation

Volumina



Inkrementelle Schäden (Zuwächse)



\mathcal{O} Beobachtungen

\mathcal{P} Prognosen

$A := \mathcal{O} \cup \mathcal{P}$

$(i, k) \in C(q)$

$:\Leftrightarrow i + k - 1 = q$

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Annahme: Für jedes Kalenderjahr q gibt es einen Faktor F_q , der die Erwartungswerte $E(S_{i,k})$ für alle $(i, k) \in \mathcal{C}(q)$ gleichzeitig skaliert.

- Wir modellieren diese Kalenderjahresfaktoren F_q als unabhängige Zufallsvariablen.
- Annahme: Die ersten beiden Momente der F_q sind als A-priori-Information verfügbar (Marktdaten), d.h. $E(F_q) =: f_q$ und $\text{Var}(F_q) =: \tau_q^2 > 0$ sind für alle q *bekannt*.
- Intention:
 - $f_q = 1$ für *normale* Kalenderjahre,
 - $f_q < 1$ für Kalenderjahre mit unterdurchschnittlichen Zuwächsen und
 - $f_q > 1$ für Kalenderjahre mit überdurchschnittlichen Zuwächsen im Markt.
- Ein großes τ_q^2 bedeutet, dass der Kalenderjahreseffekt F_q für individuelle Portefeuilles im Markt sehr unterschiedlich sein kann (heterogener Markt).

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

CY Factors						
AY	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100%	100%	100%	100%	110%	100%
2	100%	100%	100%	110%	100%	100%
3	100%	100%	110%	100%	100%	100%
4	100%	110%	100%	100%	100%	100%
5	110%	100%	100%	100%	100%	100%
6	100%	100%	100%	100%	100%	100%

StdDev CY Factors						
AY	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	0%	0%	0%	0%	5%	0%
2	0%	0%	0%	5%	0%	0%
3	0%	0%	5%	0%	0%	0%
4	0%	5%	0%	0%	0%	0%
5	5%	0%	0%	0%	0%	0%
6	0%	0%	0%	0%	0%	0%

$f_5 = 110\%$, d.h. im Markt sind die Zuwächse von KJ 5 im Schnitt 10% höher als in einem normalen Jahr

$\tau_5 = 5\%$, d.h. der KJ-Effekt variiert von Portfeuille zu Portfeuille mit einer Standardabweichung von 5%

Wir sind ziemlich sicher, dass die Zuwächse im KJ 5 auch für ein individuelles Portfeuille überdurchschnittlich sind.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

CY Factors						
AY	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100%	100%	100%	100%	110%	100%
2	100%	100%	100%	110%	100%	100%
3	100%	100%	110%	100%	100%	100%
4	100%	110%	100%	100%	100%	100%
5	110%	100%	100%	100%	100%	100%
6	100%	100%	100%	100%	100%	100%

StdDev CY Factors						
AY	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	0%	0%	0%	0%	20%	0%
2	0%	0%	0%	20%	0%	0%
3	0%	0%	20%	0%	0%	0%
4	0%	20%	0%	0%	0%	0%
5	20%	0%	0%	0%	0%	0%
6	0%	0%	0%	0%	0%	0%

$f_5 = 110\%$, d.h. im Markt sind die Zuwächse von KJ 5 im Schnitt 10% höher als in einem normalen Jahr

$\tau_5 = 20\%$, d.h. der KJ-Effekt variiert von Portfeuille zu Portfeuille mit einer Standardabweichung von 20%

Für ein individuelles Portefeuille kann der KJ-Effekt ganz anders sein als im Marktmittel. Man sollte bei der Analyse von KJ-Effekten mehr Wert auf die individuellen Daten legen.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Es ist sinnvoll, bei der A-priori-Information etwas mehr Flexibilität zuzulassen:

- Statt f_q und τ_q^2 können die ersten zwei Momente $E(F_{i,k}) =: f_{i,k}$ und $\text{Var}(F_{i,k}) =: \tau_{i,k}^2 \geq 0$ der Skalierungsfaktoren $F_{i,k}$ individuell für jedes $(i, k) \in \mathcal{A}$ vorgegeben werden.
- Da wir Kalenderjahreseffekte modellieren möchten, werden die $F_{i,k}$ aus dem gleichen Kalenderjahr als komonoton angenommen.

Motivation für die zusätzliche Flexibilität:

- Manchmal praktisch: Setzt man z.B. $f_{i,k} := 1$ und $\tau_{i,k} := 0$ für ein k und alle i , dann wird der KJ-Effekt nicht auf das Abwicklungsjahr k angewendet.
- Macht die Parameterschätzung nicht schwieriger.
- Es ist *nicht* die Intention, sehr detaillierte A-priori-Informationen zu verlangen, sondern bei Bedarf mehr Flexibilität anzubieten.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

CY Factors							
AY	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6	
1	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
3	100%	100%	110%	100%	100%	100%	100%
4	100%	110%	100%	100%	100%	100%	100%
5	110%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
6	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

StdDev CY Factors							
AY	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6	
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
3	0%	0%	5%	0%	0%	0%	0%
4	0%	5%	0%	0%	0%	0%	0%
5	5%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
6	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

$$f_{i,k} = 110\% \text{ für } i, k \text{ mit } i + k - 1 = 5, k \leq 3$$

$$\tau_{i,k} = 5\% \text{ für } i, k \text{ mit } i + k - 1 = 5, k \leq 3$$

Der Kalenderjahreseffekt betrifft nur die ersten drei Abwicklungsjahre.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Modellannahme 1

Additives Modell:

Die Zuwächse $S_{i,k}$ sind unabhängig.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten:

Die Kalenderjahre sind unabhängig, d.h. die Sigma-Algebren

$$\sigma\{F_{i,k}, S_{i,k} \mid (i, k) \in \mathcal{C}(q)\}, \quad q = 1, \dots, m + n - 1$$

sind unabhängig. Für jedes q ist der Vektor $(F_{i,k})_{(i,k) \in \mathcal{C}(q)}$ komonoton. Die Zufallsvariablen $S_{i,k}$, $(i, k) \in \mathcal{A}$ sind bedingt unabhängig gegeben $\{F_{i,k} \mid (i, k) \in \mathcal{A}\}$.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Modellannahme 2

Additives Modell:

Es gibt Parameter μ_1, \dots, μ_n mit

$$E(S_{i,k}) = v_i \mu_k$$

für alle $(i, k) \in \mathcal{A}$.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten:

Es gibt Parameter μ_1, \dots, μ_n mit

$$E(S_{i,k} \mid \mathcal{F}_{i+k-1}) = F_{i,k} v_i \mu_k$$

für alle $(i, k) \in \mathcal{A}$, wobei $\mathcal{F}_q := \sigma\{F_{i,k} \mid (i, k) \in \mathcal{C}(q)\}$.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Modellannahme 3

Additives Modell:

Es gibt Parameter $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ mit

$$\text{Var}(S_{i,k}) = v_i \sigma_k^2$$

für alle $(i, k) \in \mathcal{A}$.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten:

Es gibt Parameter $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ mit

$$\text{Var}(S_{i,k} | \mathcal{F}_{i+k-1}) = v_i \sigma_k^2$$

für alle $(i, k) \in \mathcal{A}$.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Modellannahme 4

Additives Modell:

Die Zuwächse $S_{i,k}$ sind normalverteilt.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten:

Die Kalenderjahresfaktoren $F_{i,k}$, $(i, k) \in \mathcal{A}$, sind entweder normalverteilt (falls $\tau_{i,k} > 0$) oder konstant (falls $\tau_{i,k} = 0$). Die Zufallsvariablen $S_{i,k}$, $(i, k) \in \mathcal{A}$ sind bedingt normalverteilt, gegeben $\{F_{i,k} \mid (i, k) \in \mathcal{A}\}$.

Additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Bemerkung 1: Dann gibt es Zufallsvariablen $X_q \sim \text{Norm}(0, 1)$, $q \in \{1, \dots, m+n-1\}$, so dass

$$F_{i,k} = f_{i,k} + \tau_{i,k} X_{i+k-1}$$

fast sicher für alle $(i, k) \in \mathcal{A}$. Die X_q heißen *residuale Kalenderjahreseffekte*. Beachte, dass \mathcal{F}_q die durch X_q erzeugte Sigma-Algebra ist.

Bemerkung 2: Das Modell kann sehr detaillierte A-priori-Information verarbeiten und sieht daher überparametrisiert aus. Die Philosophie hinter dem Ansatz ist jedoch, soviel Marktinformationen zu verwenden, wie verfügbar ist. Für $f_{i,k} = 1$ und $\tau_{i,k} = 0$ fällt das Modell mit dem klassischen additiven Modell zusammen.

Agenda

Problemstellung

Ein additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Zuwachsquotenverfahren mit Kalenderjahreseffekten

Numerisches Beispiel

Anhang A: EM-Algorithmus

Anhang B: Standardfehler

Anhang C: Robustifizierung

Maximum Likelihood-Schätzung

Sei $S := (S_{i,k})_{(i,k) \in \mathcal{O}}$ der Vektor der beobachteten Zuwächse und sei $X := (X_1, \dots, X_p)$ der Vektor der residualen Kalenderjahreseffekte der beobachteten Kalenderjahre. Beachte, dass X nicht beobachtbar ist.

Sei $\Theta := (\mu, \sigma) := (\mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ der zu schätzende Parametervektor. Die gemeinsame Dichte $p_{(X,S)}(\cdot; \Theta)$ von (X, S) hat eine einfache Form:

$$\begin{aligned} p_{(X,S)}(x, s; \Theta) &= p_{(X,S)}((x_j)_{j=1,\dots,p}, (s_{i,k})_{(i,k) \in \mathcal{O}}; \Theta) \\ &= \prod_{q=1}^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_q^2}{2}\right) \cdot \prod_{(i,k) \in \mathcal{O}} \frac{1}{\sqrt{2\pi v_i \sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{[s_{i,k} - (\tau_{i,k} x_{i+k-1} + f_{i,k}) \cdot v_i \mu_k]^2}{2v_i \sigma_k^2}\right). \end{aligned}$$

Maximum Likelihood-Schätzung

Um die ML-Schätzer zu berechnen, muss man die log-Likelihood

$$l_S(\Theta) = \log p_S(S; \Theta) = \log \int_{\mathbb{R}^p} p_{(X,S)}(x, S; \Theta) dx$$

der beobachteten Zuwächse S maximieren. Leider ist l_S nicht so einfach zu berechnen wie die log-Likelihood $l_{(X,S)}(\Theta) = \log(p_{(X,S)}(X, S; \Theta))$ der vollständigen Daten (X, S) .

Der EM-Algorithmus (Anhang A) ist ein iteratives Verfahren um (lokale) Maxima der beobachteten log-Likelihood l_S zu finden.

Der EM-Algorithmus erhöht in jedem Schritt die beobachtete Likelihood und konvergiert in vielen Situationen gegen den ML-Schätzer.

Iteration zur Parameterschätzung

In unserer Situation liefert der EM-Algorithmus explizite Formeln für eine Iteration zur Parameterschätzung. Definiere

$$c_{i,k}(\Theta) := \tau_{i,k}^2 \cdot a_{i+k-1}(\Theta), \quad d_{i,k}(\Theta) := f_{i,k} + \tau_{i,k} b_{i+k-1}(\Theta)$$

mit

$$a_q(\mu, \sigma) := \left(1 + \sum_{(i,k) \in \mathcal{C}(q)} \frac{v_i \mu_k^2 \tau_{i,k}^2}{\sigma_k^2} \right)^{-1}$$

und

$$b_q(\mu, \sigma) := \left(1 + \sum_{(i,k) \in \mathcal{C}(q)} \frac{v_i \mu_k^2 \tau_{i,k}^2}{\sigma_k^2} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{(i,k) \in \mathcal{C}(q)} \frac{S_{i,k} \mu_k - v_i \mu_k^2 f_{i,k}}{\sigma_k^2} \tau_{i,k} \right).$$

Iteration zur Parameterschätzung

Wir starten mit den ML-Schätzern im klassischen additiven Modell

$$\hat{\mu}_k^{(0)} := \frac{\sum_{i=1}^{l(k)} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{l(k)} v_i} \quad \text{and} \quad (\hat{\sigma}_k^{(0)})^2 := \frac{1}{l(k)} \sum_{i=1}^{l(k)} v_i \left(\frac{S_{i,k}}{v_i} - \hat{\mu}_k^{(0)} \right)^2,$$

$l(k) = \max\{i \mid (i, k) \in \mathcal{O}\}$, und iterieren

$$\hat{\mu}_k^{(v+1)} := \frac{\sum_{i=1}^{l(k)} d_{i,k}(\hat{\Theta}^{(v)}) S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{l(k)} (c_{i,k}(\hat{\Theta}^{(v)}) + d_{i,k}(\hat{\Theta}^{(v)})^2) v_i} \quad \text{and}$$

$$(\hat{\sigma}_k^{(v+1)})^2 := \frac{1}{l(k)} \sum_{i=1}^{l(k)} \left[v_i \cdot \left(\frac{S_{i,k}}{v_i} - d_{i,k}(\hat{\Theta}^{(v)}) \cdot \hat{\mu}_k^{(v+1)} \right)^2 + v_i \cdot (\hat{\mu}_k^{(v+1)})^2 \cdot c_{i,k}(\hat{\Theta}^{(v)}) \right].$$

Iteration zur Parameterschätzung

Konvergiert die Iteration, so erhalten wir Schätzer $\hat{\mu}_1^{(\infty)}, \dots, \hat{\mu}_n^{(\infty)}, \hat{\sigma}_1^{(\infty)}, \dots, \hat{\sigma}_n^{(\infty)}$.

Zuwachsqotenverfahren mit Kalenderjahreseffekten: Für $(i, k) \in \mathcal{P}$ verwenden wir die Prognosen

$$\hat{S}_{i,k}^{(\infty)} := v_i \cdot f_{i,k} \cdot \hat{\mu}_k^{(\infty)}$$

für die Zuwächse $S_{i,k}$.

Im Fall $f_{i,k} = 1$ und $\tau_{i,k} = 0$ für alle i, k ergibt sich das klassische Zuwachsqotenverfahren.

Zur Berechnung des Prognosefehlers siehe Anhang B.

Um das Verfahren robuster zu machen, sollte die Anzahl der Parameter reduziert werden. Hierzu kann man die Annahme $\sigma_k^2 = V(\mu_k)\sigma_0^2$ mit einer geeigneten Varianzfunktion V verwenden (Anhang C).

Agenda

Problemstellung

Ein additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Zuwachsquotenverfahren mit Kalenderjahreseffekten

Numerisches Beispiel

Anhang A: EM-Algorithmus

Anhang B: Standardfehler

Anhang C: Robustifizierung

Numerisches Beispiel

Volumina v_i und Zuwächse $S_{i,k}$:

Volumes		DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6	
2014	6.240.413	2014	703.670	842.367	801.442	484.742	345.426	346.250
2015	6.365.221	2015	745.821	919.642	809.694	469.578	390.161	
2016	6.428.873	2016	698.393	945.805	872.165	555.202		
2017	6.750.317	2017	730.997	872.849	1.042.499			
2018	7.020.330	2018	744.750	922.575				
2019	7.160.736	2019	731.366					

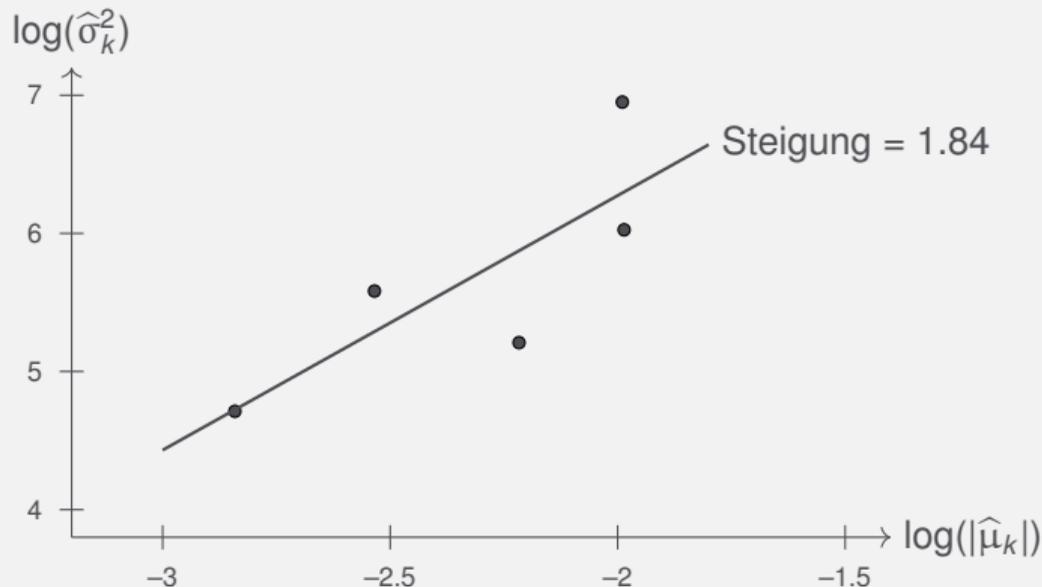
Für eine Varianzfunktion der Form $V(\mu) = |\mu|^p$ gilt

$$\log(\sigma_k^2) = p \log(|\mu_k|) + \log(\sigma_0^2).$$

Um ein Gefühl für ein plausibles p zu bekommen, wenden wir eine log-lineare Regression auf die Parameterschätzer im klassischen additiven Modell an.

Numerisches Beispiel

Log-lineare Regression:



Funktioniert nicht immer zuverlässig!

In unserem Fall ist $p = 1.84$ plausibel (Tweedie)

Numerisches Beispiel

Szenario 1

A-priori-Information (Szenario 1)

CY Factors

	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2	100%	100%	100%	100%	100%	100%
3	100%	100%	100%	100%	100%	100%
4	100%	100%	100%	100%	100%	100%
5	100%	100%	100%	100%	100%	100%
6	100%	100%	100%	100%	100%	100%

StdDev CY Factors

	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	0%	0%	0%	0%	0%	0%
3	0%	0%	0%	0%	0%	0%
4	0%	0%	0%	0%	0%	0%
5	0%	0%	0%	0%	0%	0%
6	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Annahmen:

- Keine KJ-Effekte in der Vergangenheit
- Keine KJ-Effekte in der Zukunft erwartet

Ergebnisse:

- Stochastisches Modell fällt mit dem klassischen additiven Modell zusammen
- Prognosen des klassischen ZQ-Verfahrens

Numerisches Beispiel

Szenario 2

A-priori-Information (Szenario 2)

CY Factors						
	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2	100%	100%	100%	100%	100%	100%
3	100%	100%	100%	100%	100%	100%
4	100%	100%	100%	100%	100%	100%
5	100%	100%	100%	100%	100%	100%
6	100%	100%	100%	100%	100%	100%

StdDev CY Factors						
	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	0%	0%	0%	0%	0%	5%
3	0%	0%	0%	0%	0%	5%
4	0%	0%	0%	0%	5%	5%
5	0%	0%	0%	5%	5%	5%
6	0%	0%	5%	5%	5%	5%

Annahmen:

- Keine KJ-Effekte in der Vergangenheit
- KJ-Effekte in der Zukunft möglich

Ergebnisse:

- Anderes stochastisches Modell
- Prognosen des klassischen ZQ-Verfahrens, da $f_{i,k} = 1$ für $(i, k) \in \mathcal{A}$ und $\tau_{i,k} = 0$ für $(i, k) \in \mathcal{O}$

Numerisches Beispiel

Ergebnisse der Szenarien 1–2

Reserves		
	Scenario 1	Scenario 2
1	0	0
2	353.175	353.175
3	731.856	731.856
4	1.303.779	1.303.779
5	2.315.886	2.315.886
6	3.345.174	3.345.174
Total	8.049.870	8.049.870

Standard Errors		
	Scenario 1	Scenario 2
1	0	0
2	31.588	36.189
3	42.861	50.070
4	57.749	69.210
5	84.588	105.037
6	104.508	131.802
Total	207.888	297.637

Beobachtungen:

- Gleiche Prognosen
- Szenario 2 liefert einen größeren Standardfehler, weil wir KJ-Effekte in der Zukunft zulassen

Numerisches Beispiel

Szenario 3

A-priori-Information (Szenario 3)

CY Factors

	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2	100%	100%	100%	100%	100%	100%
3	100%	100%	100%	100%	100%	100%
4	100%	100%	100%	100%	100%	100%
5	100%	100%	100%	100%	100%	100%
6	100%	100%	100%	100%	100%	100%

StdDev CY Factors

	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	0%	0%	0%	0%	5%	0%
2	0%	0%	0%	5%	0%	5%
3	0%	0%	5%	0%	5%	5%
4	0%	5%	0%	5%	5%	5%
5	5%	0%	5%	5%	5%	5%
6	0%	5%	5%	5%	5%	5%

Annahmen:

- Es gab möglicherweise einen KJ-Effekt im KJ 5
- Es ist jedoch nicht klar, ob die Zuwächse in KJ 5 höher oder niedriger waren
- KJ-Effekte in der Zukunft möglich

Numerisches Beispiel

Szenario 3

A-posteriori-KJ-Faktoren für Szenario 3

Posterior means of the calendar year factors

	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	95,67%	100,00%
2	100,00%	100,00%	100,00%	95,67%	100,00%	100,00%
3	100,00%	100,00%	95,67%	100,00%	100,00%	100,00%
4	100,00%	95,67%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	95,67%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
6	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

A-posteriori-KJ-Faktoren: $E(F_{i,k} | S; \hat{\mu}_1^{(\infty)}, \dots, \hat{\mu}_n^{(\infty)}, \hat{\sigma}_1^{(\infty)}, \dots, \hat{\sigma}_n^{(\infty)})$

Beobachtung:

Das Verfahren schätzt einen A-posteriori-KJ-Faktor von 95.67% für das KJ 5.

Numerisches Beispiel

Ergebnisse der Szenarien 1–3

Reserves			
	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3
1	0	0	0
2	353.175	353.175	352.063
3	731.856	731.856	738.244
4	1.303.779	1.303.779	1.318.436
5	2.315.886	2.315.886	2.344.655
6	3.345.174	3.345.174	3.382.710
Total	8.049.870	8.049.870	8.136.108

Standard Errors			
	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3
1	0	0	0
2	31.588	36.189	33.930
3	42.861	50.070	47.814
4	57.749	69.210	66.554
5	84.588	105.037	101.510
6	104.508	131.802	127.341
Total	207.888	297.637	290.712

Beobachtungen:

- Prognosen sind größer als in den Szenarien 1 und 2
- Grund: KJ-Faktor < 100% im KJ 5

Numerisches Beispiel

Szenario 4

A-priori-Information (Szenario 4)

CY Factors						
	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100%	100%	100%	100%	85%	100%
2	100%	100%	100%	85%	100%	100%
3	100%	100%	85%	100%	100%	100%
4	100%	85%	100%	100%	100%	100%
5	85%	100%	100%	100%	100%	100%
6	100%	100%	100%	100%	100%	100%

StdDev CY Factors						
	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	0%	0%	0%	0%	5%	0%
2	0%	0%	0%	5%	0%	5%
3	0%	0%	5%	0%	5%	5%
4	0%	5%	0%	5%	5%	5%
5	5%	0%	5%	5%	5%	5%
6	0%	5%	5%	5%	5%	5%

Annahmen:

- Im KJ 5 waren die Zuwächse im Markt ca. 15% unter dem Durchschnitt
- KJ-Effekte in der Zukunft möglich

Numerisches Beispiel

Szenario 4

A-posteriori-KJ-Faktoren für Szenario 4

Posterior means of the calendar year factors

	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	92,05%	100,00%
2	100,00%	100,00%	100,00%	92,05%	100,00%	100,00%
3	100,00%	100,00%	92,05%	100,00%	100,00%	100,00%
4	100,00%	92,05%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	92,05%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
6	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Beobachtung:

Das Verfahren liefert für das KJ 5 einen KJ-Faktor von 92.05%. Dieser Faktor ist wegen der A-priori-Information $f_{i,k} = 85\%$ for $(i, k) \in \mathcal{C}(5)$ kleiner als im Szenario 3.

Numerisches Beispiel

Ergebnisse der Szenarien 1–4

Reserves				
	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4
1	0	0	0	0
2	353.175	353.175	352.063	352.068
3	731.856	731.856	738.244	745.002
4	1.303.779	1.303.779	1.318.436	1.331.815
5	2.315.886	2.315.886	2.344.655	2.367.380
6	3.345.174	3.345.174	3.382.710	3.412.949
Total	8.049.870	8.049.870	8.136.108	8.209.214

Standard Errors

	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4
1	0	0	0	0
2	31.588	36.189	33.930	33.877
3	42.861	50.070	47.814	48.096
4	57.749	69.210	66.554	67.193
5	84.588	105.037	101.510	102.773
6	104.508	131.802	127.341	128.995
Total	207.888	297.637	290.712	294.507

Beobachtungen:

- Prognosen noch größer als im Szenario 3
- Dies ist durch den kleineren KJ-Faktor im KJ 5 bedingt

Numerisches Beispiel

Szenario 5

A-priori-Information (Szenario 5)

CY Factors

	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2	100%	100%	100%	100%	100%	100%
3	100%	100%	100%	100%	100%	100%
4	100%	100%	100%	100%	100%	100%
5	100%	100%	100%	100%	100%	100%
6	100%	100%	100%	100%	100%	100%

StdDev CY Factors

	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	5%	5%	5%	5%	5%	5%
2	5%	5%	5%	5%	5%	5%
3	5%	5%	5%	5%	5%	5%
4	5%	5%	5%	5%	5%	5%
5	5%	5%	5%	5%	5%	5%
6	5%	5%	5%	5%	5%	5%

Annahmen:

- Keine KJ-Effekte in der Vergangenheit
- Das Verfahren darf KJ-Effekte aus den Daten schätzen
- KJ-Effekte in der Zukunft möglich

Numerisches Beispiel

Szenario 5

A-posteriori-KJ-Faktoren für Szenario 5

Posterior means of the calendar year factors							
	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6	
1	101,57%	101,79%	99,65%	99,38%	96,47%	102,12%	
2	101,79%	99,65%	99,38%	96,47%	102,12%	100,00%	
3	99,65%	99,38%	96,47%	102,12%	100,00%	100,00%	
4	99,38%	96,47%	102,12%	100,00%	100,00%	100,00%	
5	96,47%	102,12%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	
6	102,12%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Beobachtung:

Die KJ-Faktoren von KJ 5 sind etwas größer als im Szenario 3. Das Verfahren schätzt weiterhin, dass KJ 5 niedrigere Zuwächse hat als die anderen Kalenderjahre. Da es keine A-priori-Information gibt, dass das KJ 5 außergewöhnlich ist, werden die anderen KJ als leicht überdurchschnittlich angenommen.

Numerisches Beispiel

Ergebnisse der Szenarien 1–5

Reserves					
	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4	Scenario 5
1	0	0	0	0	0
2	353.175	353.175	352.063	352.068	344.663
3	731.856	731.856	738.244	745.002	724.887
4	1.303.779	1.303.779	1.318.436	1.331.815	1.299.720
5	2.315.886	2.315.886	2.344.655	2.367.380	2.319.088
6	3.345.174	3.345.174	3.382.710	3.412.949	3.349.035
Total	8.049.870	8.049.870	8.136.108	8.209.214	8.037.393

Standard Errors					
	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4	Scenario 5
1	0	0	0	0	0
2	31.588	36.189	33.930	33.877	34.407
3	42.861	50.070	47.814	48.096	48.604
4	57.749	69.210	66.554	67.193	67.929
5	84.588	105.037	101.510	102.773	103.994
6	104.508	131.802	127.341	128.995	130.492
Total	207.888	297.637	290.712	294.507	293.114

Beobachtungen:

- Prognosen niedriger als im Szenario 3
- Grund: Größere A-posteriori-KJ-Faktoren als im Szenario 3

Numerisches Beispiel

Szenario 6

A-priori-Information (Szenario 6)

CY Factors						
DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6	
1	100%	100%	100%	100%	100%	100%
2	100%	100%	100%	100%	100%	105%
3	100%	100%	95%	100%	105%	105%
4	100%	90%	100%	105%	105%	105%
5	85%	100%	105%	105%	105%	105%
6	100%	105%	105%	105%	105%	105%

StdDev CY Factors						
DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6	
1	2%	2%	2%	2%	2%	2%
2	2%	2%	2%	2%	2%	5%
3	2%	2%	5%	2%	5%	5%
4	2%	8%	2%	5%	5%	5%
5	10%	2%	5%	5%	5%	5%
6	2%	5%	5%	5%	5%	5%

Annahmen:

- KJ-Effekt in KJ 5
- Auswirkungen abhängig vom Abwicklungsjahr
- Das Verfahren darf kleine (zusätzliche) KJ-Effekte aus dem Dreieck schätzen
- KJ-Effekte in der Zukunft möglich
- Inflationsschock von 5% im KJ 7

Numerisches Beispiel

Szenario 6

A-posteriori-KJ-Faktoren für Szenario 6

Posterior means of the calendar year factors

	DY1	DY2	DY3	DY4	DY5	DY6
1	100,21%	100,33%	99,71%	99,67%	101,22%	101,00%
2	100,33%	99,71%	99,67%	101,22%	101,00%	105,00%
3	99,71%	99,67%	98,05%	101,00%	105,00%	105,00%
4	99,67%	94,88%	101,00%	105,00%	105,00%	105,00%
5	91,10%	101,00%	105,00%	105,00%	105,00%	105,00%
6	101,00%	105,00%	105,00%	105,00%	105,00%	105,00%

Beobachtung:

Die A-posteriori-KJ-Faktoren von KJ 5 sind vom Abwicklungsjahr abhängig.

Numerisches Beispiel

Ergebnisse der Szenarien 1–6

Reserves						
	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4	Scenario 5	Scenario 6
1	0	0	0	0	0	0
2	353.175	353.175	352.063	352.068	344.663	365.744
3	731.856	731.856	738.244	745.002	724.887	758.451
4	1.303.779	1.303.779	1.318.436	1.331.815	1.299.720	1.355.125
5	2.315.886	2.315.886	2.344.655	2.367.380	2.319.088	2.423.290
6	3.345.174	3.345.174	3.382.710	3.412.949	3.349.035	3.511.883
Total	8.049.870	8.049.870	8.136.108	8.209.214	8.037.393	8.414.493

Standard Errors						
	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4	Scenario 5	Scenario 6
1	0	0	0	0	0	0
2	31.588	36.189	33.930	33.877	34.407	37.045
3	42.861	50.070	47.814	48.096	48.604	51.223
4	57.749	69.210	66.554	67.193	67.929	70.940
5	84.588	105.037	101.510	102.773	103.994	108.457
6	104.508	131.802	127.341	128.995	130.492	136.545
Total	207.888	297.637	290.712	294.507	293.114	306.071

Beobachtungen:

- Liefert die höchsten Prognosen
- Hauptsächlich getrieben durch den Inflations-schock im KJ 7

Numerisches Beispiel

Residuenplots

Die sechs Szenarien verwenden A-priori-Informationen mit unterschiedlicher Komplexität. Es ist leider nicht einfach ein Kriterium anzugeben, mit dem höhere Komplexität akzeptiert wird.

Residuen können ein Gefühl vermitteln, ob die A-priori-Information eine Verbesserung liefert. Die nächste Folie zeigt Plots der Residuen

$$\frac{S_{i,k} - v_i \hat{F}_{i,k}^{(\infty)} \hat{\mu}_k^{(\infty)}}{\sqrt{v_i \cdot \hat{\sigma}_k^{(\infty)}}}$$

gegen das Kalenderjahr $i + k - 1$.

Für jedes Kalenderjahr sollten die Residuen zufällig um die Null streuen.

Numerisches Beispiel

Residuenplots



Literatur

Dempster AP, Laird NM, Rubin DB (1977) *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion)*. J R Stat Soc Ser B 39:1-38

Riegel U (2022) *An incremental loss ratio method using prior information on calendar year effects*. Eur Actuar J. <https://doi.org/10.1007/s13385-022-00315-3>

Agenda

Problemstellung

Ein additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Zuwachsquotenverfahren mit Kalenderjahreseffekten

Numerisches Beispiel

Anhang A: EM-Algorithmus

Anhang B: Standardfehler

Anhang C: Robustifizierung

EM-Algorithmus

Wähle einen initialen Parametervektor $\hat{\Theta}^{(0)}$ und definiere die erwartete log-Likelihood von Θ gegeben Θ' durch

$$Q(\Theta|\Theta') := E_{X|S;\Theta'} \left(\log (p_{(X,S)}(X, S; \Theta)) \right).$$

Die EM-Iteration alterniert zwischen einem E-Schritt und einem M-Schritt.

E-Schritt: Berechne die erwartete log-Likelihood-Funktion $Q(\cdot | \hat{\Theta}^{(\nu)})$ gegeben die aktuelle Schätzung $\hat{\Theta}^{(\nu)}$ für Θ .

M-Schritt: Berechne einen neuen Parametervektor $\hat{\Theta}^{(\nu+1)}$ durch Maximieren der erwarteten log-Likelihood $Q(\cdot | \hat{\Theta}^{(\nu)})$, die im E-Schritt berechnet wurde.

Agenda

Problemstellung

Ein additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Zuwachsquotenverfahren mit Kalenderjahreseffekten

Numerisches Beispiel

Anhang A: EM-Algorithmus

Anhang B: Standardfehler

Anhang C: Robustifizierung

Mittlerer Prognosefehler (MSEP)

Sei $\mathcal{D} := \sigma\{S_{i,k} \mid (i, k) \in \mathcal{O}\}$. Der MSEP von $\widehat{R}_W^{(\infty)} := \sum_{(i,k) \in \mathcal{P}} w_{i,k} \widehat{S}_W^{(\infty)}$ wird geschätzt durch

$$\widehat{\text{mse}}_{R_W|\mathcal{D}}(\widehat{R}_W^{(\infty)}) := \widehat{\text{Var}}(R_W) + \widehat{\text{Var}}(\widehat{R}_W^{(\infty)}).$$

mit dem Schätzer

$$\widehat{\text{Var}}(R_W) := \sum_{(i,k) \in \mathcal{P}} \sum_{(j,l) \in \mathcal{P}} w_{i,k} w_{j,l} \left(\delta_{i,j} \delta_{k,l} v_i (\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^2 + \delta_{i+k,j+l} v_i v_j \widehat{\mu}_k^{(\infty)} \widehat{\mu}_l^{(\infty)} \tau_{i,k} \tau_{j,l} \right)$$

für die Prozessvarianz und dem Schätzer

$$\widehat{\text{Var}}(\widehat{R}_W^{(\infty)}) := \sum_{(i,k) \in \mathcal{P}} \sum_{(j,l) \in \mathcal{P}} w_{i,k} w_{j,l} v_i v_j f_{i,k} f_{j,l} \widehat{\text{Cov}}(\widehat{\mu}_k^{(\infty)}, \widehat{\mu}_l^{(\infty)})$$

für den quadrierten Schätzfehler.

Mittlerer Prognosefehler (MSEP)

In der Formel für $\widehat{\text{Var}}(\widehat{R}_W^{(\infty)})$ verwenden wir $\widehat{\text{Cov}}(\widehat{\mu}_i^{(\infty)}, \widehat{\mu}_k^{(\infty)}) := [(\widehat{\mathcal{I}}^{(\infty)})^{-1}]_{i,k}$ wobei $\widehat{\mathcal{I}}^{(\infty)}$ die Fisher-Information bezeichnet.

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_{q,l}^{(\mu)} &:= -\widehat{\sigma}_q^2 \cdot \frac{2v_{q-l+1}\widehat{\mu}_l^{(\infty)}\tau_{q-l+1,l}^2}{(\widehat{\sigma}_l^{(\infty)})^2}, \\ \widehat{\alpha}_{q,l}^{(\sigma)} &:= \widehat{\sigma}_q^2 \cdot \frac{2v_{q-l+1}(\widehat{\mu}_l^{(\infty)})^2\tau_{q-l+1,l}^2}{(\widehat{\sigma}_l^{(\infty)})^3}, \\ \widehat{\beta}_{q,l}^{(\mu)} &:= \widehat{\alpha}_{q,l}^{(\mu)} \sum_{(i,k) \in \mathcal{C}(q)} \frac{S_{i,k}\widehat{\mu}_k^{(\infty)} - v_i(\widehat{\mu}_k^{(\infty)})^2 f_{i,k}}{(\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^2} \\ &\quad + \widehat{\sigma}_q \cdot \frac{S_{q-l+1,l} - 2v_{q-l+1}\widehat{\mu}_l^{(\infty)}f_{q-l+1,l}}{(\widehat{\sigma}_l^{(\infty)})^2} \tau_{q-l+1,l}, \\ \widehat{\beta}_{q,l}^{(\sigma)} &:= \widehat{\alpha}_{q,l}^{(\sigma)} \sum_{(i,k) \in \mathcal{C}(q)} \frac{S_{i,k}\widehat{\mu}_k^{(\infty)} - v_i(\widehat{\mu}_k^{(\infty)})^2 f_{i,k}}{(\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^2} \\ &\quad - 2\widehat{\sigma}_q \cdot \frac{S_{q-l+1,l}\widehat{\mu}_l^{(\infty)} - 2v_{q-l+1}(\widehat{\mu}_l^{(\infty)})^2 f_{q-l+1,l}}{(\widehat{\sigma}_l^{(\infty)})^3} \tau_{q-l+1,l}.\end{aligned}$$

Moreover, let

$$\widehat{\gamma}_{i,k,l}^{(\mu)} := \tau_{i,k}^2 \widehat{\alpha}_{i+k-1,l}^{(\mu)}, \quad \widehat{\gamma}_{i,k,l}^{(\sigma)} := \tau_{i,k}^2 \widehat{\alpha}_{i+k-1,l}^{(\sigma)}, \quad \widehat{\delta}_{i,k,l}^{(\mu)} := \tau_{i,k} \widehat{\beta}_{i+k-1,l}^{(\mu)}, \quad \widehat{\delta}_{i,k,l}^{(\sigma)} := \tau_{i,k} \widehat{\beta}_{i+k-1,l}^{(\sigma)}.$$

We define $\widehat{\mathcal{I}}^{(\infty)} := (\widehat{\gamma}_{i,k}^{(\infty)})_{i,k} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ by

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_{k,l}^{(\infty)} &:= \delta_{k,l} \cdot \left(\sum_{i=1}^{I(k)} \frac{(\widehat{c}_{i,k} + \widehat{d}_{i,k}^2)v_i}{(\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^2} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{I(k)} \frac{\widehat{\delta}_{i,k,l}^{(\mu)} S_{i,k} - (\widehat{\gamma}_{i,k,l}^{(\mu)} + 2\widehat{d}_{i,k} \widehat{\delta}_{i,k,l}^{(\mu)}) v_i \widehat{\mu}_k^{(\infty)}}{(\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^2}, \\ \widehat{\gamma}_{k,n+l}^{(\infty)} &:= \widehat{\gamma}_{n+l,k}^{(\infty)} := 2\delta_{k,l} \cdot \left(\sum_{i=1}^{I(k)} \frac{\widehat{d}_{i,k} S_{i,k} - (\widehat{c}_{i,k} + \widehat{d}_{i,k}^2)v_i \widehat{\mu}_k^{(\infty)}}{(\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^3} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{I(k)} \frac{\widehat{\delta}_{i,k,l}^{(\sigma)} S_{i,k} - (\widehat{\gamma}_{i,k,l}^{(\sigma)} + 2\widehat{d}_{i,k} \widehat{\delta}_{i,k,l}^{(\sigma)}) v_i \widehat{\mu}_k^{(\infty)}}{(\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^2}, \\ \widehat{\gamma}_{n+k,n+l}^{(\infty)} &:= \delta_{k,l} \cdot \left(\sum_{i=1}^{I(k)} \frac{1}{(\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^2} + 3 \frac{(S_{i,k} - \widehat{d}_{i,k} v_i \widehat{\mu}_k^{(\infty)})^2 + v_i^2 (\widehat{\mu}_k^{(\infty)})^2 \widehat{c}_{i,k}}{v_i (\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^4} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{I(k)} \frac{2(S_{i,k} - \widehat{d}_{i,k} v_i \widehat{\mu}_k^{(\infty)}) \widehat{\delta}_{i,k,l}^{(\sigma)} \widehat{\gamma}_{i,k,l}^{(\infty)} - v_i (\widehat{\mu}_k^{(\infty)})^2 \widehat{\gamma}_{i,k,l}^{(\sigma)}}{(\widehat{\sigma}_k^{(\infty)})^3}\end{aligned}$$

for $k, l = 1, \dots, n$.

Agenda

Problemstellung

Ein additives Modell mit Kalenderjahreseffekten

Zuwachsquotenverfahren mit Kalenderjahreseffekten

Numerisches Beispiel

Anhang A: EM-Algorithmus

Anhang B: Standardfehler

Anhang C: Robustifizierung

Robustifizierung

Problem:

- Das Verfahren ist möglicherweise instabil, da $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ individuell geschätzt werden
- Ausreißer können zu unerwarteten Effekten führen!

Ziel:

- Schätzung von $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ stabilisieren um ein robusteres Verfahren zu erhalten
- Reduktion der Anzahl an Parametern!

Möglicher Ansatz:

Wähle eine Varianzfunktion $V: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ und verwende die Annahme $\sigma_k^2 = V(\mu_k)\sigma_0^2$ für alle k .

Robustifizierung

Diese Annahme impliziert

$$\text{Var} \left(\frac{S_{i,k}}{v_i} \mid \mathcal{F}_{i+k-1} \right) = \frac{\sigma_k^2}{v_i} = \frac{\sigma_0^2}{v_i} \cdot V(\mu_k),$$

was der Bedeutung einer Varianzfunktion bei einer Exponentialfamilie mit Gewichten v_i entspricht.

Natürliche Kandidaten:

$$V(\mu) = \max(|\mu|^p, V_0)$$

Für $\mu > V_0^{1/p}$ erhalten wir die bei GLMs gebräuchlichen Varianzfunktionen $V(\mu) = \mu^p$ ($p = 1$: Poisson, $1 < p < 2$: Tweedie, $p = 2$: Gamma, $p = 3$: Inverse Gauß).